المحاضرة الرابعة — الاستيفاء وجداول الفروق (تتمة)

1.4. جدول الفروق التراجعية.

بفرض لدينا دالة ما $y = f(x)$ معرفة على مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، ولنفرض أنَّ $y_0, y_1, \ldots, y_n$ هي قيم الدالة $y = f(x)$ عند النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ من مجموعة تعريف الدالة f، عندئذ فإنَّ:

الفروق التراجعية من المرتبة الأولى للدالة f تعطى بالشكل: $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n$.

الفروق التراجعية من المرتبة الثانية للدالة f تعطى بالشكل: $\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}\ ;\ i = 2, \ldots, n$.

الفروق التراجعية من المرتبة الثالثة للدالة f تعطى بالشكل: $\nabla^3 y_i = \nabla^2 y_i - \nabla^2 y_{i-1}\ ;\ i = 3, \ldots, n$.

⋮

الفروق التراجعية من المرتبة n للدالة f تعطى بالشكل: $\nabla^n y_n = \nabla^{n-1} y_n - \nabla^{n-1} y_{n-1}$.

ونبين كيفية بناء جدول الفروق التراجعية من خلال الجدول الآتي لأجل $n = 4$:

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				

2.4. الاستيفاء بكثيرات الحدود طريقة نيوتن – غريغوري التراجعية.

لتكن f دالة حقيقية ولنفرض أنَّ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ نقاطاً من مجموعة تعريف الدالة f بحيث إنَّ $x_{i+1} - x_i = h$ لأجل كل $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ وإنَّ $y_i = f(x_i)$ لأجل كل $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$، إنَّ الغاية من الاستيفاء بكثيرات الحدود هي إيجاد كثيرة حدود $p_n(x)$ من الدرجة n تحقق أنَّ:

$$p_n(x_i) = f(x_i)\ ;\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

وتعطى كثيرة الحدود $p_n(x)$ بالصيغة:

$$p_n(x) = y_n + s\nabla y_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_3 + \cdots + \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+(n-1))}{n!}\nabla^n y_n$$

حيث إنَّ $s = \dfrac{x - x_n}{h}$، فضلاً عن ذلك إنَّ $p_n(x) \cong f(x)$ لأجل كل x من مجموعة تعريف الدالة f.

مبرهنة.1.

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة متتالية في المجال $[x_m-h, x_m]$ وكانت $p_n(x)$ هي كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة n للدالة f حيث إنَّ نقاط الاستيفاء هي $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ عندئذ فإنَّ الخطأ المرتكب في الاستيفاء عند النقطة x_l يعطى بالشكل:

$$R(x_l) = f(x_l) - p_n(x_l) = C_{n+1}^{n+s} \nabla^{n+1} y_m \quad ; \quad s = \frac{x_l - x_n}{h}$$

مثال.1.

استخدم طريقة نيوتن – غريغوري التراجعية لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء الموافقة للدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	23	93	259	569	1071	1813

ثم احسب القيمة التقريبية لهذه الدالة عند النقطة $x = 2.5$ واحسب الخطأ المرتكب في الاستيفاء عند هذه النقطة.

الحل. نشكل جدول الفروق التراجعية للدالة المفروضة:

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$
2	23					
		70				
4	93		96			
		166		48		
6	256		144		0	
		310		48		$\nabla^5 y_5 = 0$
8	569		192		$\nabla^4 y_5 = 0$	
		502		$\nabla^3 y_5 = 48$		
10	1071		$\nabla^2 y_5 = 240$			
		$\nabla y_5 = 742$				
12	1813					

نلاحظ أنَّ: $s = \frac{x - x_5}{h} = \frac{x-12}{2}$. بما أنَّ $\nabla^4 y_5 = \nabla^5 y_5 = 0$ فإنَّ كثيرة الحدود الاستيفاء المطلوبة من الدرجة الثالثة، ولها الشكل:

$$p_3(x) = y_5 + s\nabla y_5 + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_5 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_5$$

بالتعويض نجد أنَّ:

$$p_3(x) = 1813 + s\,742 + \frac{s(s+1)}{2!}240 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}48$$

$$p_3(x) = 1813 + \frac{x-12}{2}742 + \frac{\frac{x-12}{2}(\frac{x-12}{2}+1)}{2!}240 + \frac{\frac{x-12}{2}(\frac{x-12}{2}+1)(\frac{x-12}{2}+2)}{3!}48$$

$$p_3(x) = 1813 + (x-12)371 + \left(\left(\frac{x-12}{2}\right)\left(\frac{x-12}{2}+1\right)\right)120 + \left(\left(\frac{x-12}{2}\right)\left(\frac{x-12}{2}+1\right)\left(\frac{x-12}{2}+2\right)\right)8$$

$$p_3(x) = 1813 + (x-12)371 + \left(\left(\frac{x-12}{2}\right)\left(\frac{x-10}{2}\right)\right)120 + \left(\left(\frac{x-12}{2}\right)\left(\frac{x-10}{2}\right)\left(\frac{x-8}{2}\right)\right)8$$

$$p_3(x) = 1813 + (x-12)371 + ((x-12)(x-10))30 + ((x-12)(x-10)(x-8))$$

$$p_3(x) = 1813 + 371x - 4452 + 30x^2 - 660x + 3600 + (x^2 - 22x + 120)(x-8)$$

$$p_3(x) = 1813 + 371x - 4452 + 30x^2 - 660x + 3600 + x^3 - 30x^2 + 296x - 960$$

$$p_3(x) = x^3 + 7x + 1$$

وبالتالي يكون:

$$f(2.5) \cong p_3(2.5) = 34.125$$

الخطأ المرتكب في الاستيفاء عند هذه النقطة:

$$R(2.5) = C_4^{3+s}\nabla^4 y_5 = \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\nabla^4 y_5 = 0 \quad ; \quad s = \frac{2.5-12}{2}$$

تمرين.

استخدم طريقة نيوتن – غريغوري التراجعية لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة الرابعة $(n=4)$ الموافقة للدالة $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ حيث إنَّ $x_0 = 1, h = 1$.

تمرين.

استخدم طريقة نيوتن – غريغوري التراجعية لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء الموافقة للدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	-1	0	1	2
y_i	4	2	0	6

ثم احسب القيمة التقريبية لهذه الدالة عند النقطة $x = 3$.